

导数

DATE.

PAGE.

导数的计算公式:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$$

例: 已知 $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-10)$, 求 $f'(0)$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 50!$$

$$\begin{aligned} \text{或 } f(x) &= x g(x) \\ f'(x) &= g(x) + x g'(x) \\ x=0 \text{ 时 } f'(x) &= 50! \end{aligned}$$

例: 求抛物线 $y = -3x^2 + 1$ 过点 $P(1, -1)$ 的切线方程.

$$\text{设切线方程 } y = -6x_0 x + 6x_0 - 1$$

$$\text{代入 } (x_0, -3x_0^2 + 1)$$

$$\therefore x_0 = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore y = -6x + 5 \quad \text{或} \quad y = -(6+2\sqrt{3})x + 5+2\sqrt{3}$$

$$\text{或 } y = (2\sqrt{3}-6)x + 5-2\sqrt{3}$$

$$\textcircled{1} f'(x) > 0 \quad (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上 } \uparrow$$

$$\textcircled{2} f'(x) < 0 \quad (a, b) \Rightarrow f(x) \text{ 在 } (a, b) \text{ 上 } \downarrow$$

例1: 求 $f(x) = \sin x - x$, $x \in (0, \pi)$ 的单调区间

$$f'(x) = \cos x - 1 < 0$$

单调减

例2: 已知函数 $f(x) = 4x + ax^2 - \frac{2}{3}x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) 在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 求 a 的范围.

解: 在 $[-1, 1]$ 上 $f'(x) = -2x^2 + 2ax + 4 \geq 0$ 恒成立. 必须是 $\geq$ 或 $\leq$ 不然取不到.

$$\text{即 } g(x) = x^2 - ax - 2 \leq 0 \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上恒成立.}$$

$$\therefore \begin{cases} g(-1) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [-1, 1]$$

例3: $f(x) = \frac{2x-a}{x^2+2}$ 在 $[-1, 1]$ 上 $\uparrow$, 求 a 的范围.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2) - 2x(2x-a)}{(x^2+2)^2} \geq 0 \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上恒成立}$$

$$\text{即 } -2x^2 + 2ax + 4 \geq 0 \text{ 在 } [-1, 1] \text{ 上恒成立}$$

$$\therefore \begin{cases} f'(-1) \geq 0 \\ f'(1) \geq 0 \end{cases} \therefore a \in [-1, 1]$$

例4: $D_f = \mathbb{R}$, $f(-1) = 2$, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 2$, 则 $f(x) > 2x + 4$ 的解集

$$\text{设 } g(x) = f(x) - 2x - 4 \quad \therefore g'(x) = f'(x) - 2 > 0$$

$$\therefore g(x) \text{ 是 } \uparrow, \therefore g(-1) = 0 \quad \therefore \text{当 } x > -1 \text{ 时 } g(x) > 0$$

$$\therefore f(x) > 2x + 4 \text{ 的解集是 } (-1, +\infty)$$

变1: $f(x)$ 为奇函数, 其导数为 $f'(x)$, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$

求 $f(x) > 0$ 成立的 x 范围.

$$\text{解: 构造函数: } g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$$

$$\text{即 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上 } \downarrow$$

由题知: $g(x)$ 为偶函数, 且 $g(-1) = 0$

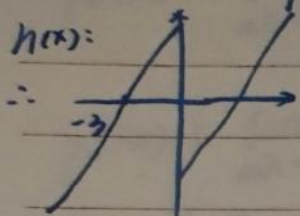


$$\therefore x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

变式2: $f(x), g(x)$ 分别是 D 在 R 上的奇偶函数, $x < 0$ 时, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$

且 $g(-3) = 0$, 则 $f(x) \cdot g(x) < 0$ 的解集为?

设 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, 为奇函数 $h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) > 0, x < 0$



$\therefore$ 解集为 $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

变式3: $f(x)$ 定义域 $(-\infty, 0)$, 其导数为 $f'(x)$, 且 $2f(x) + xf'(x) > x^2$,

则不等式 $(x+2014)^2 f(x+2014) - 4f(-2) > 0$ 解集为?

设 $g(x) = x^2 f(x)$ $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) < x^2 < 0$

$\therefore g'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上 $\downarrow$

$\therefore g(x+2014) > 4f(-2) = g(-2)$

$\therefore x < -2016$

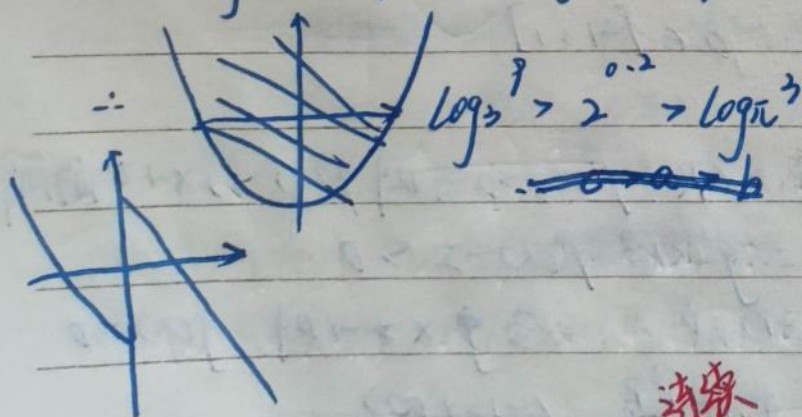
变式4: $f(x)$ 为偶函数, $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) + xf'(x) < 0$ 成立.

$a = 2^{0.2} f(2^{0.2})$

$b = \log \pi^3 f(\log \pi^3)$ $c = \log_3 9 f(\log_3 9)$

比较 a, b, c 大小?

设 $g(x) = xf(x)$ $g'(x) = f(x) + xf'(x) < 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 上成立.



透解

设函数 $f(x)$ 在 R 上存在可导函数 $f'(x)$, $\forall x \in R, f(-x) + f(x) = x^2$. 且在 $(0, +\infty)$ 上, $f'(x) > x$, 若 $f(2-a) - f(a) \geq 2-2a$, 则 a 范围?

构造: $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$

$\therefore g'(x) = f'(x) - x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 成立

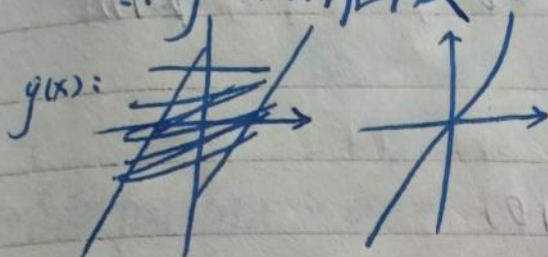
$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上 $\uparrow$

$$x = f(-x) + f(x) = x^2$$

$$\therefore f(x) - \frac{x}{2} = \frac{(-x)^2}{2} - f(-x)$$

$$g(x) = -g(-x)$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数



$\therefore g(x)$ 在 \$\mathbb{R}\$ 上 \$\uparrow\$

$$\therefore f(2-a) - f(a) \geq 2 - 2a$$

$$f(2-a) - \frac{(2-a)^2}{2} \geq f(a) - \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore g(2-a) \geq g(a)$$

$$\therefore 2-a \geq a$$

$$\therefore a \leq 1$$

四:

证明: $e^x \geq x+1$

设 $f(x) = e^x - x - 1$

$f'(x) = e^x - 1$

$\therefore f(x) \geq f(0) = 0$

$\therefore e^x \geq x+1$

$e^x \geq x+1$

$e^{x-1} \geq x$

$x \geq \ln(x+1)$

$x-1 \geq \ln x$

五. 常用构造:

$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x} \quad (\frac{1}{x} \rightarrow x)$

$\ln x \leq \frac{x}{e} \quad (e^x \rightarrow x)$

$\ln x \leq ex - 2 \quad (ex \rightarrow x)$

$\ln x \leq x^2 + x \quad (x^2 \rightarrow x)$

$\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$

① $x f'(x) - f(x) \longrightarrow g(x) = \frac{f(x)}{x}$

② $x f'(x) - 2f(x) \longrightarrow g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

③ $f'(x) - f(x) \longrightarrow g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$

④ $x f'(x) + f(x) \longrightarrow g(x) = x \cdot f(x)$

⑤ $\frac{x}{3} f'(x) + f(x) \longrightarrow g(x) = x^3 \cdot f(x)$

⑥ $f'(x) + 2f(x) \longrightarrow g(x) = e^{2x} f(x)$

函数的极值

如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$ ，右侧 $f'(x) < 0$ ，那么 $f(x_0)$ 是极大值；
 $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$ 极小值

导数值为 0 的点不一定是极值点。

极值点导数不一定为 0。 (可导函数才为 0)

若函数 $f(x) = ax^3 - bx + 4$ ，当 $x = 2$ 时函数 $f(x)$ 有极值 $-\frac{4}{3}$ 。

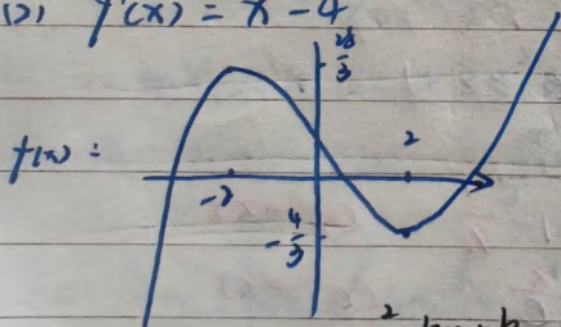
(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有三个不等实根，求 k 的范围。

$$(1) \begin{cases} -\frac{4}{3} = 8a - 2b + 4 \\ 12a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$$

$$(2) f'(x) = x^2 - 4$$



$$\therefore k \in (-\frac{4}{3}, \frac{28}{3})$$

已知函数 $f(x) = \frac{2x^2 - kx + k}{e^x}$ ($k \in \mathbb{R}$)。

(1) k 为何值时，函数 $f(x)$ 无极值；

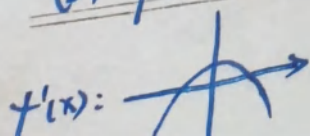
(2) 试确定 k 的值，使 $f(x)$ 的极小值为 0。

$$(1) f'(x) = \frac{e^x(4x - k) - 2x^2 + kx - k}{e^{2x}} = \frac{-2x^2 + (k+4)x - k}{e^x}$$

$$\Delta = k^2 + 8k + 16 - 16k \leq 0 \quad (k-4)^2 \leq 0$$

$\therefore k = 4$ 时，无极值

$$(2) f'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x-k) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 或 } \frac{k}{2} \text{ 时有极值}$$



$$1^{\circ} \frac{k}{2} > 2 \text{ 时 } k > 4 \quad \text{根小值为 } f(2) = \frac{8-k}{e^{\frac{k}{2}}} = 0 \quad k=8$$

$$2^{\circ} \frac{k}{2} < 2 \text{ 时 } k < 4 \quad \text{根小值为 } f(\frac{k}{2}) = \frac{\frac{k}{2} - e^{\frac{k}{2}} + k}{e^{\frac{k}{2}}} = 0 \quad k=0$$

综上 $k=0$ 或 8

已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1$ ($a \in \mathbb{R}$)

(1) 当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程;

(2) 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 单调性.

(1) $a = -1$ 时: $f(x) = \ln x + x + \frac{2}{x} - 1$ 当 $x = 2$ 时, $f(2) = \ln 2 + 2$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore \text{切线方程: } y = x + \ln 2$$

(2) $f'(x) = \frac{1}{x} - a - \frac{1-a}{x^2} = \frac{-ax^2 + x + a - 1}{x^2}$

~~$f'(x) = 0$~~

$1^{\circ} a = 0$ 时 $f'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0 \Rightarrow x > 1$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$2^{\circ} a \neq 0$ 时 $f'(x) = \frac{(x-1)[-ax - (a-1)]}{x^2}$

1° 当 $1 < \frac{1-a}{a}$ 时 $0 < a < \frac{1}{2}$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 1 < x < \frac{1-a}{a}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \text{ 或 } (\frac{1-a}{a}, +\infty)$$

2° 当 $1 > \frac{1-a}{a}$ 时, 即 $a < 0$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

3° 当 $1 = \frac{1-a}{a}$ 时, $a = \frac{1}{2}$

$$\therefore f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}}{x^2} \leq 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 恒成立}$$

综上所述:

设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 1$, $g(x) = ax^2 - 2x + 1$, $a \neq 0$.

(1) 若 $a > 0$, 求 $f(x)$ 单调区间.

(2) 当函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像只有一个公共点且 $g(x)$ 有最小值时, 记 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$, 求 R_h ?

(3) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(a, a+2)$ 上均为 $\uparrow$, 求 a 范围.

$$(1) f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 = (3x - a)(x + a)$$

$$\because a > 0, \therefore f'(x) \text{ 的左右零为 } -a, \frac{a}{3}$$

$$\therefore (-\infty, -a), (\frac{a}{3}, +\infty) \uparrow \quad (-a, \frac{a}{3}) \downarrow$$

(2) $\because g(x)$ 存在最小值 $\therefore a > 0$

$$f(x) = g(x) \text{ 有一解为 } x = 0$$

$$\text{即 } x^2 + 2 - a^2 = 0 \text{ 无解}$$

$$\therefore 2 - a^2 \leq 0 \quad 0 < a \leq \sqrt{2}$$

$$h(a) = \frac{4a - 4}{4a} = 1 - \frac{1}{a} \quad a \in (0, \sqrt{2}]$$

$$\therefore R_h = (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$(3) g'(x) = 2ax - 2 \text{ 在 } (a, a+2) \uparrow$$

$$\begin{cases} g'(a) \geq 0 \\ g'(a+2) \geq 0 \end{cases} = a \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$$

$$1^\circ a > 0 \text{ 时: } f(x) \text{ 在 } (\frac{a}{3}, +\infty), (-\infty, -a) \uparrow$$

$$g(x) \text{ 在 } (\frac{1}{a}, +\infty) \uparrow$$

$$\begin{cases} a \geq \frac{1}{a} \\ a \geq \frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow a \geq 1$$

$$a > 0$$

$$2^\circ a < 0 \text{ 时 同理 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, \frac{a}{3}), (-a, +\infty) \uparrow$$

$$g(x) \text{ 在 } (-\infty, \frac{1}{a}) \uparrow$$

$$\begin{cases} a+2 \leq \frac{1}{a} \\ a+2 \leq \frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow a \leq -3$$

$$a < 0$$

$$\text{综上 } (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$