

集合

1. 定义：某些指定的对象集在一起

用 $A, B, C, \dots$ 表示

2. 元素与集合的关系

例： $A = \{2, 3\}$ $2 \in A$ $4 \notin A$ $\in$ 读作“属于”

3. 集合元素的三大特征

- ① 无序性
- ② 互异性
- ③ 确定性

4. 常见数集表示方法：

① 实数集： R ② 有理数集： Q ③ 整数集： Z ④ 自然数集： N ⑤ 正整数集： N_+ 或 N^*

5. 集合的表示方法

① 列举法：例： $A = \{1, 2, 3\}$ 数集 $\rightarrow$ 代表元素② 描述法： $B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$

格式

 $\{x | x \text{ 满足的条件}\}$ 偶数集 $C = \{x | x = 2k, k \in Z\}$ 奇数集 $D = \{x | x = 2k + 1, k \in Z\}$ 一次函数 $y = x + 3$ 与 $y = -2x + 6$ 的图象的交点组成的集合 $\{(1, 4)\}$ 点集 或 $\{(x, y) | x = 1, y = 4\}$ 例： $A = \{x | y = x^2 + 1\}$ $= R$ $B = \{y | y = x^2 + 1\} = \{y | y \geq 1\}$

数集

 $C = \{(x, y) | y = x^2 + 1\}$

点集

例：易错

已知 A 是由元素 $a+2, (a+1)^2, a^2+2a+2$ 构成的集合且 $1 \in A$ ，求 a 解：若 $a+2 = 1$ 则 $a = -1$ 若 $(a+1)^2 = 1$ $a = -2$ 或 0 若 $a^2+2a+2 = 1$ $a = -1$

不满足集合元素的互异性

 -2 成立， 0 不成立

不成立

综上所述： $a = -2$

6. 集合之间的关系

① 子集: A 中每一个元素都在 B 中, 则 A 是 B 的子集. $A \subseteq B$ $\begin{cases} A \text{ 包含于 } B \\ B \text{ 包含 } A \\ A \text{ 是 } B \text{ 的子集} \end{cases}$

② 集合相等: $\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \Rightarrow A = B$

③ 真子集: $\begin{cases} A \subseteq B \\ A \neq B \end{cases} \Rightarrow A \subset B$

④ $\emptyset \subseteq A$ $\emptyset \subset B$ (B 为非空集合)

$\begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq C \end{cases} \Rightarrow A \subseteq C$

$A \subseteq A$

⑤ $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 的子集个数为 2^n 个.

真子集 $2^n - 1$ 个.

非空真子集 $2^n - 2$ 个.

例: ① $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbb{Z}\}$

$N = \{x | x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$

$P = \{x | x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbb{Z}\}$

则 M, N, P 的关系.

解: $\begin{cases} x = \frac{bm+1}{6} \\ x = \frac{3n-2}{6} \\ x = \frac{3p+1}{6} \end{cases}$ 取值

1	7	13	19		
-2	1	4	7	10	13
-2	1	4	7	10	13

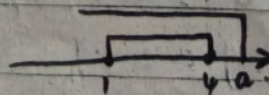
$\therefore M \subset N = P$

② $A = \{x | x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$

$B = \{x | x - a \leq 0\}$

$A \subseteq B$ 求 a 的范围

解: $A = [1, 4] = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$



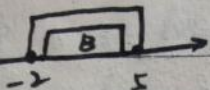
$\therefore A \subseteq B \therefore a \geq 4$

⑦ 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$

(1) 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

(2) 若 $x \in \mathbb{Z}$, 求 A 的非空真子集的个数.

解: (1) $\because B \subseteq A$



I: $B \neq \emptyset$ 时

$$\begin{cases} m+1 \geq -2 \\ 2m-1 \leq 5 \\ 2m-1 \geq m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ m \leq 3 \\ m \geq 2 \end{cases} \therefore 2 \leq m \leq 3$$

II: $B = \emptyset$ 时: $m+1 > 2m-1$

$$m < 2$$

综上所述: $m \leq 3$

(2) $\because x \in \mathbb{Z}$, $\therefore A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore A$ 的非空真子集个数为 $2^8 - 2 = 254$

⑧ 集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - mx + 2 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的值组成的集合.

解: $A = \{1, 2\}$

$\because B \subseteq A$

① $B = \emptyset$

$$\therefore m^2 - 8 < 0$$

$$-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$$

② $B = \{1\}$

$$\therefore \begin{cases} 1 - m + 2 = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

~~无解~~ 无解

③ 当 $B = \{2\}$

$$\therefore \begin{cases} 4 - 2m + 2 = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

~~无解~~ 无解

综上所述: $m \in \{m | -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}, m = 3\}$

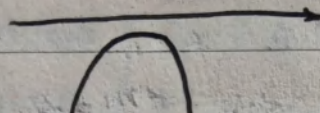
④ 当 $B = \{1, 2\}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore m = 3$$

例5: 设集合 $P = \{m | -1 < m < 0\}$, $Q = \{m \in \mathbb{R} | mx^2 + 4mx - 4 < 0 \text{ 对任意实数 } x \text{ 恒成立}\}$, 求 P 与 Q 的关系.

解: ① 当 $m=0$ 时
 $-4 < 0$ 恒成立.

②  $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -1 < m < 0 \end{cases}$

综上: $-1 < m \leq 0 \quad \therefore P \subseteq Q$

例6: 设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | ax^2 + (a+1)x + b = 0\}$
 $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x - 3 = 0\} = \{3, -1\}$

当 $b=1$ 时, $A \subseteq B$. 求 a 的取值域.

解: ① 当 $a=0$ 时.
 $x = -1$ 成立

② 当 $a \neq 0$ 时

I: $\begin{cases} x = 3 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{无解}$

II: $\begin{cases} x = -1 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1$

III: $\begin{cases} 9a + 4a + 5 = 0 \\ a - a - 1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{5}{13}$ IV: $A = \emptyset$
 $\therefore \Delta = (a+1)^2 < 0$

综上: $a \in \{-\frac{5}{13}, 0, 1\}$

7. ① 交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

② 并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
 $\rightarrow \begin{cases} \text{① } x \in A, x \in B \\ \text{② } x \in A, x \notin B \\ \text{③ } x \notin A, x \in B \end{cases}$

③ $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

② 补集: $C_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\} \Rightarrow A \subseteq U$
 $C_U(C_U A) = A$

例1: $U = \{x | x \leq 4\}$, $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$

① $A \cap B = \{x | -2 < x \leq 2\} = (-2, 2]$

② $(C_U A) \cup B = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x = 4\} = (-\infty, -2] \cup \{4\}$

③ $A \cap C_U B = \{x | 2 < x < 4\} = (2, 4)$

④ $(C_U A) \cup (C_U B) = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup \{4\}$

⑤ $C_U(A \cap B) = (-\infty, -2] \cup (2, 4]$

⑥ $(C_U A) \cap (C_U B) = (-\infty, -3) \cup \{4\}$

⑦ $C_U(A \cup B) = (-\infty, -3) \cup \{4\}$

结论: $(C_U A) \cup (C_U B) = C_U(A \cap B)$ 反的补 = 补的并

$(C_U A) \cap (C_U B) = C_U(A \cup B)$ 并的补 = 补的交

例2: 已知: $A = \{x | a < x \leq a+8\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$, 若 $A \cup B = R$, 则 a 的取值域为?



$$\therefore \begin{cases} a < -1 \\ a+8 > 5 \end{cases} \Rightarrow -3 < a < -1$$

例3

$A = \{y | y = x^2 - 1\}$, $B = \{y | y = -x^2 + 1\}$ 求: $A \cap B$
 $= \{y | y \geq -1\}$ $= \{y | y \leq 1\}$

$\therefore A \cap B = [-1, 1]$

$A = \{(x, y) | y = x^2 - 1\}$, $B = \{(x, y) | y = -x^2 + 1\}$ 求: $A \cap B$
 $A \cap B = \{(1, 0), (-1, 0)\}$

例4: 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | x < -1\}$, $B = \{x | 2a < x < a+3\}$, 且 $B \subseteq \complement_{\mathbb{R}} A$

求 a 的取值范围.

解: $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x \geq -1\}$

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2a < a+3 \\ 2a \geq -1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} B = \emptyset$$

$$\therefore a+3 \leq 2a$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq a < 3$$

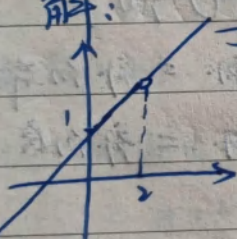
$$a \geq 3$$

综上所述: $a \geq -\frac{1}{2}$

例5: 若全集 $I = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$,

$N = \{(x, y) | y \neq x+1\}$. 则 $(\complement_I M) \cap (\complement_I N)$

解: $\frac{y-3}{x-2} = 1 \Rightarrow y = x+1 \quad (x \neq 2)$



$$(\complement_I M) \cap (\complement_I N) = \complement_I (M \cup N) = \{(2, 2)\}$$

例6: M, P 是两个非空集合, M 与 P 的差集为: $M - P = \{x | x \in M, x \notin P\}$

求: $M - (M - P)$

解: 设 $M = \{1, 2, 4\}$ $P = \{3, 4\}$

$$M - P = M - \{1, 2\} = \{4\} = M \cap P$$