

$$|MN| = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

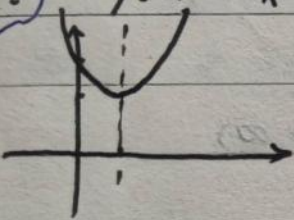
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

一元二次方程与不等式

例:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$x \in [0, m]$ 的值域



解: 对称轴 $x=1$

① 当 $0 \leq m < 1$ 时

$$f(x)_{\min} = f(m) = m^2 - 2m + 3$$

$$f(x)_{\max} = f(0) = 3$$

$$\therefore R_f = [m^2 - 2m + 3, 3]$$

② 当 $1 \leq m < 2$ 时

$$f(x)_{\min} = f(1) = 2$$

$$f(x)_{\max} = f(0) = 3 \quad \therefore R_f = [2, 3]$$

③ 当 $m \geq 2$ 时

$$f(x)_{\min} = f(1) = 2$$

$$f(x)_{\max} = f(m) = m^2 - 2m + 3 \quad \therefore R_f = [2, m^2 - 2m + 3]$$

综上所述: - - -

例: α, β 是方程 $4x^2 - 4mx + m + 2 = 0$ 的两根, 当 m 取何值, $\alpha^2 + \beta^2$ 有最小值

解: 由韦达定理

$$\alpha + \beta = m$$

$$\alpha\beta = \frac{m+2}{4}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = m^2 - \frac{m}{2} - 1$$

$$= (m - \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{16}$$

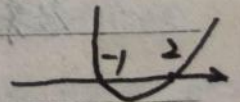
$$\Delta \geq 0$$

$$m^2 - m - 2 \geq 0$$

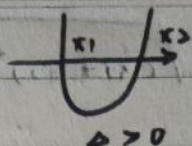
$$m \geq 2 \text{ 或 } m \leq -1 \iff (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

$\therefore$ 当 $m = -1$ 时 有最小值

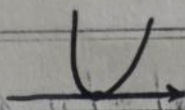
$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$$



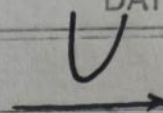
$$y = ax^2 + bx + c$$



$$\Delta > 0$$



$$\Delta = 0$$



$$\Delta < 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_1, x_2 \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \text{无}$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) \quad \{x | x \neq -\frac{b}{2a}\} \quad R$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) \quad R \quad R$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad (x_1, x_2) \quad \emptyset \quad \emptyset$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad [x_1, x_2] \quad \{-\frac{b}{2a}\} \quad \emptyset$$

例: $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

解不等式 $bx^2 + ax + c > 0$

解: 由题知, 2, 3 是 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根

$$\text{韦达定理: } \begin{cases} -\frac{b}{a} = 5 \\ \frac{c}{a} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -5a \\ c = 6a \end{cases}$$

$$\therefore \text{可化为 } -5ax^2 + ax + 6a > 0$$

$$\because a < 0 \quad (\text{A} \rightarrow)$$

$$\therefore -5x^2 + x + 6 < 0$$

$$\therefore \text{解集为 } (-\infty, -1) \cup (\frac{6}{5}, +\infty)$$

例: $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1 > 0$ 恒成立, 求 a 的取值

最高次项系数含有字母, 分类讨论

答案: $1 \leq a < 5$

二. 分式不等式的解法

例1: $\frac{x+3}{x-2} > 0$

解 方法1: $\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+3 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$

方法2: 商为正 则 积为正

$(x+3)(x-2) > 0$

解: $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

$\therefore x > 2$ 或 $x < -3$

注意 分母不为0

例2: $\frac{4x+5}{3x+7} > 1$

解: $\frac{4x+5-3x-7}{3x+7} > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{3x+7} > 0 \quad (x-2)(3x+7) > 0$

$\therefore x > 2$ 或 $x < -\frac{7}{3}$

总结: $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0$

$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0$ 且 $g(x) \neq 0$

三. 绝对值不等式

① $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

另: $a < |x-A| < b$

$A-b < x < A+b$

② $|x| > a \Rightarrow x > a$ 或 $x < -a$

则: $A-a < x < A+a \quad \therefore x \in (A-b, A-a) \cup (A+a, A+b)$

例1 解不等式

① $|2x-1| < 2$

② $|x-3| > 1$

③ $|2x+1| \leq x+2$

④ $|x^2-3| > 2x$

解: $-2 < 2x-1 < 2$

解: $x-3 > 1$ 或 $x-3 < -1$

解: $\frac{x-2}{x+2} \leq 0$

解: $x^2-3 > 2x$

$-1 < 2x < 3$

$x > 4$ 或 $x < 2$

$-1 \leq x \leq 1$

或 $x^2-3 < -2x$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

$x > 3$ 或 $x < -1$

或 $-3 < x < 1$

$\therefore (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

⑤ $1 < |x-2| \leq 3$

法一: $|x-2| \leq 3$

$|x-2| > 1$

法二: $|x-2|$ 表示到2的距离

$-3 \leq x-2 \leq 3$

$x-2 > 1$ 或 $x-2 < -1$

它 $> 1 \leq 3$, 即

$-1 \leq x \leq 5$

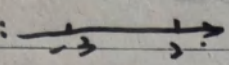
$x > 3$ 或 $x < 1$

$\therefore [-1, 1) \cup (3, 5]$

同时满足用{表示:

$\begin{cases} |x-2| \leq 3 \\ |x-2| > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \text{ 或 } x < 1 \\ -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

例2: $|x+3| + |x-2| < 7$

解: 法一: 

(找绝对值^零点)

分区间讨论 ① 当 $x > 2$ 时:

$$x+3+x-2 < 7$$

$$x < 3$$

$$\therefore 2 < x < 3$$

② 当 $-3 \leq x \leq 2$ 时:

$$x+3+2-x < 7$$

$$5 < 7$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2$$

③ 当 $x < -3$ 时:

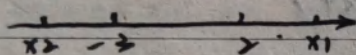
$$-x-3+2-x < 7$$

$$x < -4$$

$$\therefore -3 < x < -4$$

求交集) $\therefore x \in (-4, 3)$

法二: 用绝对值的几何意义



原不等式表示: x 到 -3 和 2 的距离和小于 7.

① x 在 $[-3, 2]$ 时 $s=5$ 成立

② x 在 $(2, +\infty)$ 时 $(x-2)+(x+3) < 7$ $x < 3$

③ x 在 $(-\infty, -3)$ 时 $(2-x)+(2-x) < 7$ $x > -4$

$$\therefore x \in (-4, 3)$$

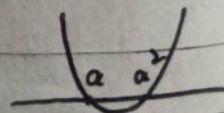
例3: $|2x+1| > |x-1|$

平方 $4x^2+4x+1 > x^2-2x+1$

四. 含参数不等式解法

例1: $x^2 - (a+a^2)x + a^3 < 0$

$\Rightarrow (x-a)(x-a^2) < 0$. $\therefore$ 与 x 轴交点为 a, a^2



① 当 $a^2 > a$ 时, 即 $a > 1$ 或 $a < 0$.

$$a < x < a^2$$

② 当 $a^2 < a$ 时, 即 $0 < a < 1$

$$a^2 < x < a$$

② 当 $a^2 = a$ 时. 即 $a = 0$. 或 $a = 1$

若 $a = 0$ 则原不等式为 $x^2 < 0$ 不成立

若 $a = 1$ 则原不等式为 $x^2 - 2x + 1 < 0$ 不成立.

综上所述: ① 当 $a > 1$ 或 $a < 0$ 时 $\dots (a, a^2)$

例2: $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$.

① 当 $a = 0$ 时.

注意讨论 $a = 0$.

$$-x + 1 < 0$$

$$\therefore x > 1$$

② 当 $a \neq 0$ 时. 此式为一元二次不等式

$\because$ 方程 $ax^2 - (a+1)x + 1 = 0$ 的两根为 $1, \frac{1}{a}$

当 $\frac{1}{a} > 1$ 时. 即 $0 < a < 1$ $\therefore 1 < x < \frac{1}{a}$

当 $\frac{1}{a} < 1$ 时. 即 $a > 1$ 或 $a < 0$ ~~$\frac{1}{a} < x < 1$~~

当 $a > 1$ 时. 开口向上 $\therefore \frac{1}{a} < x < 1$

当 $a < 0$ 时. 开口向下 $\therefore x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$

当 $\frac{1}{a} = 1$ 时. 即 $a = 1$ $x^2 - 2x + 1 < 0$ 无解.

综上所述: ① 当 $a = 0$ 时. $(1, +\infty)$

② 当 $0 < a < 1$ 时. $(1, \frac{1}{a})$

③ 当 $a > 1$ 时 $(\frac{1}{a}, 1)$

④ 当 $a < 0$ 时 ~~$\frac{1}{a}$~~ $(-\infty, \frac{1}{a}) \cup (1, +\infty)$

⑤ 当 $a = 1$ 时 $\emptyset$

五: 一元二次方程根的分布

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

① 方程有两个不相等的正根

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

③ 方程有两个不相等的负根

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

④ 两根异号

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \quad \text{实际上 } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0 \text{ 时, } \Delta > 0$$

⑤ 两根同号

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

例 1: 方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ 有两个不相等的正根, 求 a 的取值范围?

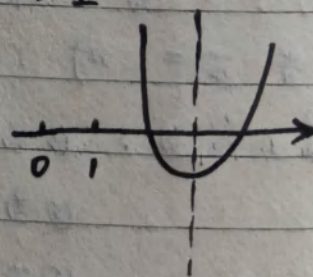
$$\text{解: } \begin{cases} \Delta = a^2 - 8 > 0 & \therefore a^2 > 8 \\ x_1 + x_2 = a > 0 & a > 2\sqrt{2} \text{ 或 } a < -2\sqrt{2} \\ x_1 \cdot x_2 = 2 > 0 & \text{且 } a > 0 \end{cases}$$

综上所述: $a > 2\sqrt{2}$

变式: 方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ 的两根在 $(1, +\infty)$ 上

$$\text{解: } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 2\sqrt{2} \text{ 或 } a \leq -2\sqrt{2} \\ \frac{a}{2} > 1, a > 2 \\ a < 3 \end{cases}$$

综上所述: $2\sqrt{2} \leq a < 3$



例 2: 已知二次函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 4$, 在下列条件下, 求 a 的取值范围

(1) 零点均大于 1.

(2) 一个零点大于 1, 一个零点小于 1.

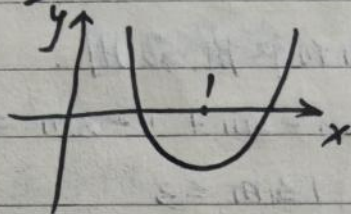
解: (1) 设方程 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ 的两根为 x_1, x_2
由题意知, $x_1 > 1$ 且 $x_2 > 1$

$$\therefore \begin{cases} \Delta = 4a^2 - 16 \geq 0 \\ -\frac{-2a}{2} > 0 \\ 1 - 2a + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a \geq 2 \text{ 或 } a \leq -2 \\ a < \frac{5}{2} \end{cases}$$

综上所述: $2 \leq a < \frac{5}{2}$

(2) 由题意得:

$$(\Delta \geq 0)$$



$$f(1) < 0 \therefore 1 - 2a + 4 < 0 \therefore a > \frac{5}{2}$$

例3: ① $7x^2 - (m+13)x + m^2 - m - 2 = 0$ 两根满足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$

求 m 范围

② 若方程 $x^2 + (p+2)x + 1 = 0$ 若方程无正根, 求 p 范围

解: ① 由题意得

$$\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m^2 - \frac{m-8}{2} < 0 \\ m^2 - 3m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ 或 } m > 2 \\ -2 < m < 4 \\ m > 3 \text{ 或 } m < 0 \end{cases}$$

综上所述: $m \in (-2, -1) \cup (3, 4)$

②

无正根

① 无根

② 有一个根为负

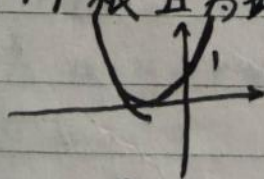
③ 有两个根为负

1. 当方程无根, $\therefore \Delta = p^2 + 4p + 4 - 4 < 0$

$$p > 4 \text{ 或 } p < 0$$

2. 有一个根且为负:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{p+2}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \text{ 或 } p = -4 \\ p > -2 \end{cases}$$



$$\therefore p = 0$$

3. 有两个不相等的负根:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{p+2}{2} < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < -4 \text{ 或 } p > 0 \\ p > -2 \end{cases}$$

分类讨论

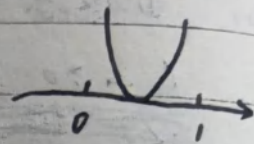
数形结合

$$\therefore p > 0$$

综上所述: $p \in (-4, +\infty)$

例4: 已知二次函数 $f(x) = x^2 - (m-1)x + 2m$ 在 $[0, 1]$ 上有且只有一个零点, 求实数 m 的取值范围.

① 只有一根 $\begin{cases} \Delta = 0 \\ 0 \leq \frac{m-1}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 - 8m = 0 \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases}$ 无解.

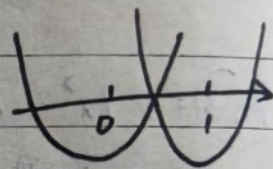


② 有两个根, 但只有一个在 $[0, 1]$ 之间

也可写成 $f(0) \cdot f(1) \leq 0$

I. $\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases}$

即 $f(0) \cdot f(1) < 0$



$$2m \cdot (m+2) < 0$$
$$\rightarrow -2 < m < 0$$

II. $f(0) = 0$

$$\therefore m = 0$$

代入: $f(x) = x^2 + x$

两根为: 0, -1

成立

$$f(1) = 0$$

$$\therefore m = -2$$

代入: $f(x) = x^2 + 3x - 4$

两根为: -4, 1

成立

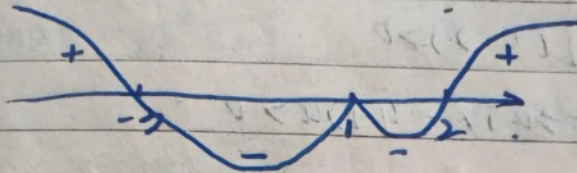
综上所述: $m \in [-2, 0]$

不等式解法

一元高次不等式解法

例: $(x-1)(x^2+x-3)(x-2) \geq 0$

$$(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x-1)(x-2) \geq 0$$



穿针引线 / 数轴标根

$$(-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$$

奇穿偶切

根的奇次

例: (1) $2x^3 + x^2 - 5x + 2 > 0$

 $x=1$ 是零点

~~$(x-1)(2x^2+x+2)$~~

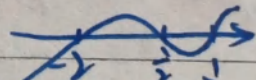
$(x-1)(2x^2+mx+n)$

$2x^3 - 2x^2 + mx^2 - mx + nx - n$

$$\begin{cases} m-2=1 \\ -m+n=-5 \\ -n=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=-2 \end{cases}$$

$\therefore (x-1)(2x^2+3x-2)$

$(x-1)(2x-1)(x+2) > 0$

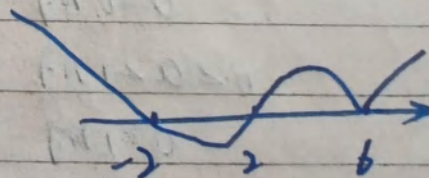


$\therefore (-2, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

(2) $(x^2-4)(x-6)^2 \leq 0$ 的解集是

~~$(x-2)(x+2)(x-6)^2 \leq 0$~~ $[-2, 2] \cup \{6\}$

$(x-2)(x+2)(x-6)^2 \leq 0$



例: (1) $ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0$

1° $a=0$ 时 $x < 2$

2° $a \neq 0$ 时 方程的两根为 $2, \frac{2}{a}$

1° 当 $\frac{2}{a} > 2$ 时 即 $0 < a < 1$ 时

$x < 2$ 或 $x > \frac{2}{a}$

2° 当 $\frac{2}{a} = 2$ 时 即 $a=1$ 时

$x \neq 2$

3° 当 $\frac{2}{a} < 2$ 时 即 $a < 0$ 或 $a > 1$

1° $a < 0$ 时 $\frac{2}{a} < x < 2$

2° $a > 1$ 时

$x < \frac{2}{a}$ 或 $x > 2$

解: 上

例: 解关于 x 的不等式 $\frac{a(x-1)}{x-2} > 1$

$$\frac{a(x-1)-x+2}{x-2} > 0$$

$$[a(x-1)-x+2](x-2) > 0$$

$$[(a-1)x+2-a](x-2) > 0$$

$$(a-1)x^2 + (4-3a)x - 4 + 2a > 0$$

1° $a=1$ 时 $x > 2$

2° $a \neq 1$ 时 $[(a-1)x - (a-2)](x-2) > 0$

两根为 $2, \frac{a-2}{a-1}$

1° $2 < \frac{a-2}{a-1}$ 时, 即 $0 < a < 1$ 时:

~~$$x < \frac{a-2}{a-1} < x < 2$$~~

2° $2 = \frac{a-2}{a-1}$ 时, 即 $a=0$ 时

无解

3° $2 > \frac{a-2}{a-1}$ 时, 即 $a > 1$ 或 $a < 0$ 时

1° $a > 1$ 时

$x < \frac{a-2}{a-1}$ 或 $x > 2$

2° $a < 0$ 时

$x > \frac{a-2}{a-1}$

综上所述:

$a < 0$ 时

~~$$x < \frac{a-2}{a-1}$$~~

$x < \frac{a-2}{a-1}$ 或 $x > 2$

$a=0$ 时

无解

$0 < a < 1$ 时

~~$$x < \frac{a-2}{a-1}$$~~

$2 < x < \frac{a-2}{a-1}$

$a=1$ 时

$x > 2$

$a > 1$ 时

~~$$x < \frac{a-2}{a-1}$$~~

$\frac{a-2}{a-1} < x < 2$

例: 该函数 $f(x) = mx^2 - mx + m - 6$

1) 若对于 $x \in [1, 2]$, $f(x) < 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围

2) 若对于 $m \in [-2, 2]$, $f(x) < 0$ 恒成立, 求 x 的范围。

1) $m < \frac{6}{x^2 - x + 1}$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立

$$g(x) = \frac{6}{x^2 - x + 1} \quad \text{在 } [1, 2] \text{ 上}$$

$$\text{对称轴 } x = \frac{1}{2} \quad \therefore x^2 - x + 1 \text{ max} = 7$$

$$\therefore g(x)_{\min} = \frac{6}{7}$$

$$\therefore m < \frac{6}{7}$$

基本不等式

一. 对于任意实数 a, b , $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立

二. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

算术平均数 $\geq$ 几何平均数

等差中项 $\geq$ 等比中项

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

三. 两个正数乘积为定值, 和有最小值. 当且仅当两值相等时取最值.

和为定值, 积有最大值

一正 二定 三相等

(多次用, 条件取=条件相同)

例: ① $f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$ 的值域为

令 $t = x^2 + 1$ $t \in [1, +\infty)$

$f(x) = t + \frac{1}{t} - 1$

$\therefore$

$f(x) \in [1, +\infty)$

$f(x) = (x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} - 1$

$x^2+1 + \frac{1}{x^2+1} \geq 2$

当且仅当 $x^2+1 = \frac{1}{x^2+1}$

$\therefore f(x) \geq 1$

② $a > b > 0$, $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c})$ 的最小值为 4.

$f(x) = \frac{b+c}{a} + \frac{a}{b+c} + 2$

$\frac{b+c}{a} + \frac{a}{b+c} \geq 2$

当且仅当 $\frac{b+c}{a} = \frac{a}{b+c}$ 时成立

$\therefore f(x) \geq 4$

③ 已知 $x > 3$, 求 $\frac{4}{x-3} + x$ 的最小值

$f(x) = \frac{4}{x-3} + x - 3 + 3$

$\frac{4}{x-3} + x - 3 \geq 4$ 当且仅当 $\frac{4}{x-3} = x - 3$ 时成立, 即 $x = 5$

$\therefore f(x)_{\min} = 7$

④ $y = \sin x + \frac{4}{\sin x}$, $a \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 的最小值
不能用均值不等式

⑤ $x < \frac{5}{4}$, 求 $y = 1 - 4x + \frac{1}{5-4x}$ 的最小值
 $y = 5 - 4x + \frac{1}{5-4x} - 4$

$5 - 4x + \frac{1}{5-4x} \geq 2$ 当且仅当 $5-4x = \frac{1}{5-4x}$ 时成立
即 $x = 1$

⑥ 求函数 $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x+1}$ ($x > -1$) 的最小值
 $y = \frac{(x+1)^2 - 5(x+1) + 5}{x+1} = x+1 + \frac{5}{x+1} - 5$

$x+1 + \frac{5}{x+1} \geq 2\sqrt{5}$ 当且仅当 $x+1 = \frac{\sqrt{5}}{x+1}$ 时成立
即 $x = \sqrt{5} - 1$

$\therefore y_{\min} = 2\sqrt{5} - 5$

⑦ 求函数 $y = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值

$y = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2$ 当且仅当 $\sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 时成立
 $\therefore y_{\min} = 2$

例: (1) 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $x + y = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = (x+y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$
 $= 1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 \geq 3 + 2\sqrt{2}$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ 时成立

$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ y = 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{cases} \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \min = 3 + 2\sqrt{2}$

(2) 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1$, 求 $x+y$ 的最小值

$x+y = (x+y)(\frac{1}{x} + \frac{9}{y}) = 1 + \frac{y}{x} + \frac{9x}{y} + 9 \geq 10 + 6$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{9x}{y}$ 时成立

$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{9}{y} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{9x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 12 \end{cases} \therefore x+y \min = 16$

(3) 已知 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$ ($x > 0, y > 0$), 求 $x+y$ 的最小值.

$$(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) = 1+2 + \frac{y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 3+2\sqrt{2}$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{2x}{y}$ 时成立

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{2x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} + 1 \\ y = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \therefore x+y_{\min} = 3+2\sqrt{2}$$

(4) 已知正数 x, y 满足 $x+y=4$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y}$ 的最小值

$$\text{解: } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) (x+y) = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{y}{x} + \frac{2x}{y} \right) \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{2x}{y}$ 时成立

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{2x}{y} \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4\sqrt{2}-4 \\ y = 8-4\sqrt{2} \end{cases} \therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} \min = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$$

例: 若正数 a, b 满足 $ab = a+b+3$, 求 (1) ab 范围 (2) $a+b$ 范围

$$ab = a+b+3 \geq 2\sqrt{ab} + 3 \quad a+b = ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$\text{令 } t = \sqrt{ab} \quad t > 0$$

$$t^2 - 2t - 3 \geq 0$$

$$t \leq -1 \text{ 或 } t \geq 3$$

$$\therefore t^2 = ab \geq 9$$

$$\text{令 } a+b = m$$

$$m+3 \leq \frac{m^2}{4}$$

$$m^2 - 4m - 12 \geq 0$$

$$m \geq 6 \text{ 或 } m \leq -2 \text{ (舍)}$$

$$\therefore a+b \geq 6$$

例: 设 $x > -1$, 求 $y = \frac{(x+5)(x+2)}{x+1}$ 的最小值

$$y = \frac{x^2 + 7x + 10}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + 5(x+1) + 4}{x+1} = x+1 + \frac{4}{x+1} + 5$$

当且仅当 $x+1 = \frac{4}{x+1}$ 时, 即 $x=1$ 时取最小值

$$\therefore x+1 + \frac{4}{x+1} + 5 \geq 9$$

求函数 $y = \frac{x^4 + 3x^2 + 3}{x^2 + 1}$ 的最小值

$$y = \frac{(x^2+1)^2 + x^2 + 1}{x^2+1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} + 1$$

当且仅当 $x^2+1 = \frac{1}{x^2+1}$ 时, 即 $x=0$ 时 $y_{\min} = 2+1 = 3$.

例: 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 求证 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

(1) 设 a, b, c 都是正数, 求证 $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$a^2 + c^2 \geq 2ac$$

2) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 6$

例: 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + xy = 1$, 则 $x+y$ 的最大值是

$$(x+y)^2 - xy = 1$$

$$x+y = \sqrt{1+xy} \geq \sqrt{4xy}$$

当且仅当 $1+xy = 4xy$ 时.

$$x+y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

例: 已知 $a > 0, b > 0$, $A. a^2 + \frac{b^2}{2} = 1$, 则 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值为

$$\begin{aligned} a\sqrt{1+b^2} &= \sqrt{a^2(1+b^2)} = \sqrt{a^2 + a^2b^2} \\ &\leq \sqrt{a^2 + \frac{1+b^2}{2} \cdot b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + 1 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1 \end{aligned}$$

和为定值

例: 设 $a, b > 0, a+b=5$, 则 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3}$ 的最大值为?

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{b+3} \leq \sqrt{a+1+b+3} = \sqrt{a+b+4} = \sqrt{9} = 3$$

当且仅当 $\sqrt{a+1} = \sqrt{b+3}$ 时取等.

$$\therefore \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \min = 3\sqrt{2}$$

例: 正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$, 则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时,
 $\frac{z}{x} + \frac{1}{y} - \frac{z}{2}$ 的最大值为.

$$\frac{xy}{z} = \frac{xy}{x^2 - 3xy + 4y^2} = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{4y}{x} - 3}$$

当且仅当 $x = 2y$ 时, 取最大

$$\frac{z}{x} + \frac{1}{y} - \frac{z}{2} = \frac{z}{2y} + \frac{1}{y} - \frac{z}{2y} = \frac{1}{y} = -(\frac{1}{y})^2 + 2(\frac{1}{y})$$

$\therefore$ 最大值为 1